

## 6. ЛЕКЦИЯ. Рекуррентные сети

### *Общие положения*

Отдельную группу нейронных сетей составляют сети с обратной связью между различными слоями нейронов. Это так называемые рекуррентные сети. Их общая черта состоит в передаче сигналов с выходного либо скрытого слоя во входной слой. Главная особенность таких сетей – динамическая зависимость на каждом этапе функционирования. Изменение состояния одного нейрона отражается на всей сети вследствие обратной связи типа «один ко многим». В сети возникает переходный процесс, который завершается формированием нового устойчивого состояния, отличающегося в общем случае от предыдущего. Другой особенностью рекуррентных сетей является тот факт, что для них не подходит ни обучение с учителем, ни обучение без учителя. В таких сетях весовые коэффициенты синапсов рассчитываются только однажды перед началом функционирования сети на основе информации об обрабатываемых данных, и все обучение сети сводится именно к этому расчету. С одной стороны, предъявление априорной информации можно расценивать, как помощь учителя, но с другой – сеть фактически просто запоминает образцы до того, как на ее вход поступают реальные данные, и не может изменять свое поведение, поэтому говорить о звене обратной связи с учителем не приходится. Из сетей с подобной логикой работы наиболее известны сеть Хопфилда и сеть Хемминга, которые обычно используются для организации ассоциативной памяти. Ассоциативная память играет роль системы, определяющей взаимную зависимость векторов. В случае, когда на взаимозависимость исследуются компоненты одного и того же вектора, говорят об ассоциативной памяти. Если же взаимозависимыми оказываются два различных вектора, можно говорить о памяти гетероассоциативного типа. Типичным представителем первого класса является сеть Хопфилда, а второго – сеть Хемминга. Главная задача ассоциативной памяти сводится к запоминанию входных обучающих выборок таким образом, чтобы при представлении новой выборки система могла сгенерировать ответ, – какая из запомненных ранее выборок наиболее близка к вновь поступившему образу. Наиболее часто в качестве меры близости отдельных векторов применяется мера Хемминга.

При использовании двоичных значений (1,0) расстояние Хемминга между двумя векторами  $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  и  $d = [d_1, d_2, \dots, d_N]^T$  определяется в виде:

$$d_H(y, d) = \sum_{i=1}^N [d_i(1 - y_i) + (1 - d_i)y_i]. \quad (1)$$

При биполярных ( $\pm 1$ ) значениях элементов обоих векторов расстояние Хемминга рассчитывается по формуле:

$$d_H(y, d) = \frac{1}{2} \left[ N - \sum_{i=1}^N y_i d_i \right]. \quad (2)$$

### Сети Хопфилда

Американским исследователем Хопфилдом в 80-х годах предложен специальный тип нейронных сетей. В отличие от сетей с прямыми связями (Feedforward Networks или FF - Nets), сети Хопфилда являются рекуррентными или сетями с обратными связями (Feedback Networks).

Сети Хопфилда обладают следующими свойствами:

1. Симметрия дуг: сети содержат  $n$  нейронов, соединенных друг с другом. Каждая дуга (соединение) характеризуется весом  $w_{ij}$ .
2. Симметрия весов: вес соединения нейрона  $n_i$  с нейроном  $n_j$  равен весу обратного соединения:

$$w_{ij} = w_{ji}; w_{ii} = 0.$$

3. Бинарные входы: сеть Хопфилда обрабатывает бинарные входы  $\{0,1\}$  или  $\{-1,1\}$ . В литературе встречаются модели сетей как со значениями 0 и 1, так и  $-1, 1$ . Для структуры сети это безразлично. Однако формулы для распознавания образов (изображений) при использовании значений  $-1$  и  $1$  для входов и выходов нейронов сети Хопфилда получаются нагляднее.

**Определение.** Бинарная сеть Хопфилда определяется симметричной матрицей с нулевыми диагональными элементами, вектором  $T$  порогов нейронов и знаковой функцией активации или выхода нейронов.

Каждый вектор  $X$  с компонентами  $-1$  или  $1$ , удовлетворяющий уравнению  $X = f(WX - T)$ , называется образом для сети Хопфилда.

Обобщенная структура сети Хопфилда представляется, как правило, в виде системы с непосредственной обратной связью выхода с входом (рис.1).

Характерная особенность такой системы состоит в том, что выходные сигналы нейронов являются одновременно входными сигналами сети:

$$x_i(t) = y_i(t - 1)$$

В классической системе Хопфилда отсутствует связь нейрона с собственным выходом, что соответствует  $w_{ij} = 0$ , а матрица весов является симметричной  $W = W^T$ .

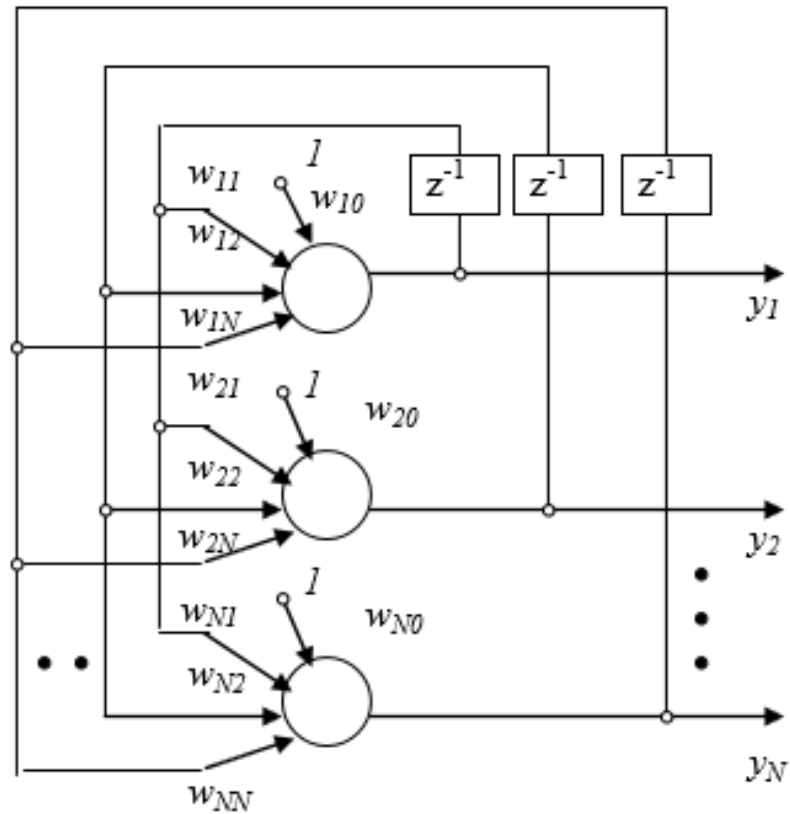


Рис.1. Обобщенная структура сети Хопфилда

Сеть Хопфилда состоит из единственного слоя нейронов, число которых является одновременно числом входов и выходов сети. Поэтому считается, что сеть не имеет входных элементов, а входной вектор задает первоначальную активность нейронов, которая затем изменяется в ходе итерационного процесса, обусловленного наличием обратных связей.

Каждый нейрон связан синапсами со всеми остальными нейронами, а также имеет один входной синапс, через который осуществляется ввод сигнала. В качестве функции активации нейронов сети Хопфилда используется знаковая функция,

$$s_j = \begin{cases} +1, & \text{если } net_j > 0, \\ -1, & \text{если } net_j < 0. \end{cases} \quad (3)$$

хотя для сетей Хопфилда также можно использовать пороговую функцию, линейную функцию с насыщением или сигмоидальные функции активации.

Зависимость 3 называется сигнум-функцией и в более краткой форме она записывается в виде

$$s_j = \text{sgn}(net_j).$$

Это означает, что выходной сигнал  $i$ -го нейрона определяется функцией:

$$y_i = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^N w_{ij}x_j + b_i\right), \quad (4)$$

где  $N$  обозначает число нейронов.

Будем считать, что пороговые элементы являются компонентами вектора  $x$ . Без учета единичных задержек сети, представляющих собой способ синхронизации процесса передачи сигналов, основные зависимости, определяющие сеть Хопфилда, можно представить в виде:

$$y_i(t) = \text{sgn}\left(\sum_{j=0, i \neq j}^N w_{ij}y_j(t-1)\right), \quad (5)$$

с начальным условием  $y_i(0) = x_j$ . В процессе функционирования сети Хопфилда можно выделить два режима: обучения и классификации. В режиме обучения на основе известных обучающих выборок  $x$  подбираются весовые коэффициенты  $w_{ij}$ . В режиме классификации при зафиксированных значениях весов и вводе конкретного начального состояния нейронов  $y(0) = x$  возникает переходной процесс, протекающий в соответствии с выражением (5) и завершающийся в одном из локальных минимумов, для которого  $y(t) = y(t-1)$ .

При вводе только одной обучающей выборки  $x$  процесс изменений продолжается до тех пор, пока зависимость (5) не начнет соблюдаться для всех  $N$  нейронов. Это условие автоматически выполняется в случае выбора значений весов, соответствующих отношению

$$w_{ij} = \frac{1}{N} x_i x_j, \quad (6)$$

поскольку только тогда  $\frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N x_i x_j x_j\right) = x_i$  (вследствие биполярных значений элементов вектора  $x$  всегда выполняется соотношение  $x_j^2 = (\pm 1)^2 = 1$ ).

Следует отметить, что зависимость (6) представляет собой правило обучения Хебба. При вводе большого числа обучающих выборок  $x(t)$  для  $t = 1, 2, \dots, p$  веса  $w_{ij}$  подбираются согласно обобщенному правилу Хебба, в соответствии с которым

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^p x_i^{(t)} x_j^{(t)} \quad (7)$$

Благодаря такому режиму обучения веса принимают значения, определяемые усреднением множества обучающих выборок.

В случае множества обучающих выборок становится актуальным фактор стабильности ассоциативной памяти. Для стабильного функционирования сети необходимо, чтобы реакция  $i$ -го нейрона  $y_i^l$  на  $l$ -ю обучающую выборку  $x^l$  совпадала с ее  $i$ -й составляющей  $x_i^l$ . Это означает, что с учетом выражения (7) получим

$$y_i^{(l)} = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=0}^N w_{ij} x_j^{(l)}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \sum_{t=1}^p x_i^{(t)} x_j^{(t)} x_j^{(l)}\right) = x_i^{(l)} \quad (8)$$

Если взвешенную сумму входных сигналов  $i$ -го нейрона обозначить  $u_i^l$ , то можно выделить в ней ожидаемое значение  $x_i^l$  и остаток, называемый диафонией:

$$u_i^{(l)} = x_i^{(l)} + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N \sum_{t \neq l} x_i^{(t)} x_j^{(t)} x_j^{(l)} \quad (9)$$

Вследствие применения знаковой функции активации, выполнение условия (8) возможно при малых значениях диафонии, не способных изменить знак  $x_i^l$ . Это означает, что, несмотря на определенное несовпадение битов, переходный процесс завершается в нужной точке притяжения. При предоставлении тестовой выборки, отличающейся некоторым количеством битов, нейронная сеть может откорректировать эти биты и завершить процесс классификации в нужной точке притяжения. Тем не менее, правило Хебба обладает невысокой продуктивностью. Максимальная емкость ассоциативной памяти (число запомненных образцов) при обучении по правилу Хебба с допустимой погрешностью 1%, составляет примерно 14% от числа нейронов сети. Кроме того, при наличии шума, применение правила Хебба приводит к различным неточностям в виде локальных минимумов, далеких от исходного решения. Поэтому в качестве альтернативы используют методы обучения, основанные на псевдоинверсии. Идея этого метода состоит в том, что при правильно подобранных весах, каждая поданная на вход выборка  $x$  генерирует на выходе саму себя, мгновенно приводя к исходному состоянию (зависимость (5)). В матричной форме это можно представить в виде:

$$WX = X, \quad (10)$$

где  $W$  - матрица весов сети размерностью  $N \times N$ , а  $X$  - прямоугольная матрица размерностью  $N_p$ , составленная из  $p$  последовательных обучающих векторов  $x^{(t)}$ , то есть  $X = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}]$ . Решение такой линейной системы

уравнений имеет вид:

$$W = X X^+ \quad (11)$$

где знак  $+$  обозначает псевдоинверсию. Если обучающие векторы линейно независимы, последнее выражение можно представить в форме:

$$W = X(X^T X)^{-1} X^T \quad (12)$$

Псевдоинверсия матрицы размерностью  $N \times p$  в этом выражении заменена обычной инверсией квадратной матрицы  $X^T X$  размерностью  $p \times p$ . Дополнительное достоинство выражения (12) – возможность записать его в итерационной форме, не требующей расчета обратной матрицы. В этом случае выражение (12) принимает вид функциональной зависимости от последовательности обучающих векторов  $x^{(t)}$  для  $t = 1, 2, \dots, p$ .

$$W^{(t)} = W^{(t-1)} + \frac{1}{[x^{(t)}]^T x^{(t)} - [x^{(t)}]^T W^{(t-1)} x^{(t)}} \times [W^{(t-1)} x^{(t)} - x^{(t)}] \times [W^{(t-1)} x^{(t)} - x^{(t)}]^T \quad (13)$$

при начальных условиях  $W^{(0)} = 0$ . Такая форма предполагает однократное предъявление всех обучающих выборок, в результате чего матрица весов принимает значение  $W = W^p$ . Зависимости (12) и (13) называются методом проекций. Применение метода псевдоинверсии увеличивает максимальную емкость сети Хопфилда, которая становится равной  $N - 1$ .

Модифицированный вариант метода проекций – метод  $\Delta$ -проекций – это градиентная форма алгоритма минимизации целевой функции. В соответствии с этим способом веса подбираются рекуррентно с помощью циклической процедуры, повторяемой для всех обучающих выборок:

$$W \leftarrow W + \frac{\eta}{N} [x^{(t)} - W x^{(t)}] [x^{(t)}]^T \quad (14)$$

Коэффициент  $\eta$  - это коэффициент обучения, выбираемый обычно из интервала  $[0.7 - 0.9]$ . Процесс обучения завершается, когда изменение вектора весов становится меньше априорно принятого значения  $\varepsilon$ . По завершении подбора весов сети их значения «замораживаются», и сеть можно использовать в режиме распознавания. В этой фазе на вход сети подается тестовый вектор  $x$  и рассчитывается ее отклик в виде:

$$y(t) = \text{sgn}(W y(t-1)) \quad (15)$$

(в начальный момент  $y(0) = x$ , причем итерационный процесс повторяется для последовательных значений  $y(t)$  вплоть до стабилизации

отклика. В процессе распознавания образа по зашумленным сигналам, образующим начальное состояние нейронов, возникают проблемы с определением конечного состояния, соответствующего одному из запомненных образов. Возможны ошибочные решения. Одной из причин нахождения ошибочных решений является возможность перемешивания различных компонентов запомненных образов и формирования стабильного состояния, воспринимаемого как локальный минимум.

Для пояснения алгоритма формирования матрицы синаптических весов приведем пример. Допустим, что предметная область содержит два образа, закодированных с помощью двух векторов:  $[-1, 1, -1]$  и  $[1, -1, 1]$ . Перемножая их самих на себя и складывая, получим квадратную матрицу

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [-1 \ 1 \ -1] + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ -1 \ 1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Выполнив обнуление главной диагонали, окончательно получим:

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Теперь предположим, что мы закодировали и ввели в сеть Хопфилда матрицу синаптических весов, соответствующую трем образам, изображенным на рис. 2.

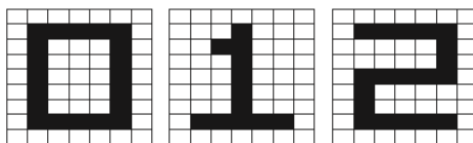


Рис. 2. Три образа, запомненные сетью Хопфилда

После этого мы предъявляем сети входной вектор (т.е. задаем первоначальную активность нейронов), соответствующий некоторому искаженному образу, изображенному на рис. 3 в левом верхнем углу.

Как видно из последующих кадров рис. 3, итерационный процесс привел к тому, что на выходе сети Хопфилда сформировался вектор, в точности соответствующий одному из ранее введенных образов. В этом случае говорят, что входной образ ассоциировался с одним из введенных ранее образов и что рекуррентные сети рассмотренного типа выступают в роли ассоциативных запоминающих устройств.

Хопфилду удалось математически строго показать, что при любом входном векторе итерационный процесс всегда приведет к распознаванию

одного из введенных ранее образов, наиболее близкому к предъявленному. Однако максимальное количество запоминаемых сетью образов  $p_{max}$  ограничено формулой:

$$p_{max} = \frac{N}{2 \ln N} \text{ где } N \text{ — число нейронов сети Хопфилда.}$$

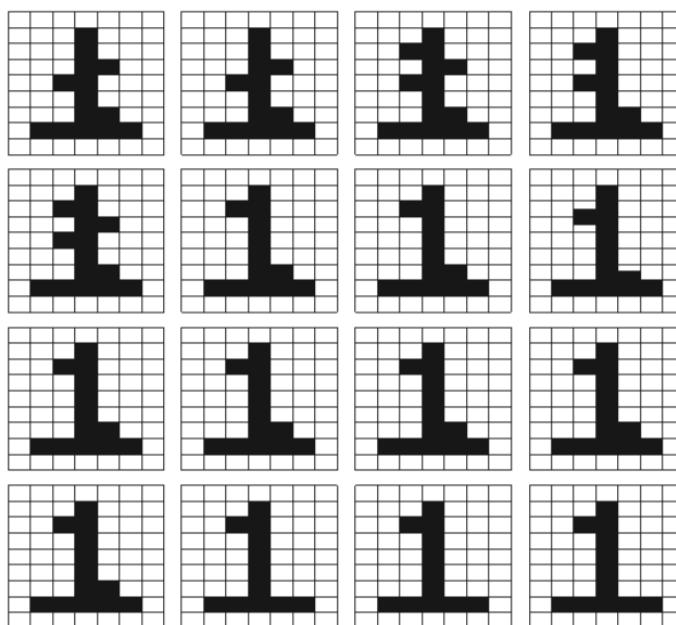


Рис. 3. Предъявленный нейронной сети Хопфилда искаженный образ и его деформация за последующие 15 итераций

### ***Сеть Хемминга***

Сеть Хемминга – это трехслойная рекуррентная структура, которую можно считать развитием сети Хопфилда, была предложена Р. Липпманом. Она позиционируется как специализированное гетероассоциативное запоминающее устройство. Основная идея функционирования сети состоит в минимизации расстояния Хемминга между тестовым вектором, подаваемым на вход сети, и векторами обучающих выборок, закодированными в структуре сети. Обобщенная структура сети Хемминга представлена на рисунке 4.

Первый ее слой имеет однонаправленное распространение сигналов от входа к выходу и фиксированные значения весов. Второй слой, MAXNET, состоит из нейронов, связанных обратными связями по принципу «каждый с каждым», при этом в отличие от структуры Хопфилда существует ненулевая связь входа нейрона со своим собственным выходом. Веса нейронов в слое MAXNET постоянны. Разные нейроны связаны отрицательной обратной связью с весом  $-\varepsilon$ , при этом обычно величина  $\varepsilon$  обратно пропорциональна числу образов. С собственным выходом нейрон связан положительной обратной связью с весом  $+1$ . Веса пороговых элементов равны нулю. Нейроны



этого слоя функционируют в режиме WTA (Winner Takes All — победитель получает все), при котором в каждой фиксированной ситуации активизируется только один нейрон. Выходной однонаправленный слой формирует выходной вектор, в котором только один нейрон имеет выходное значение, равное 1, а все остальные – равные 0.

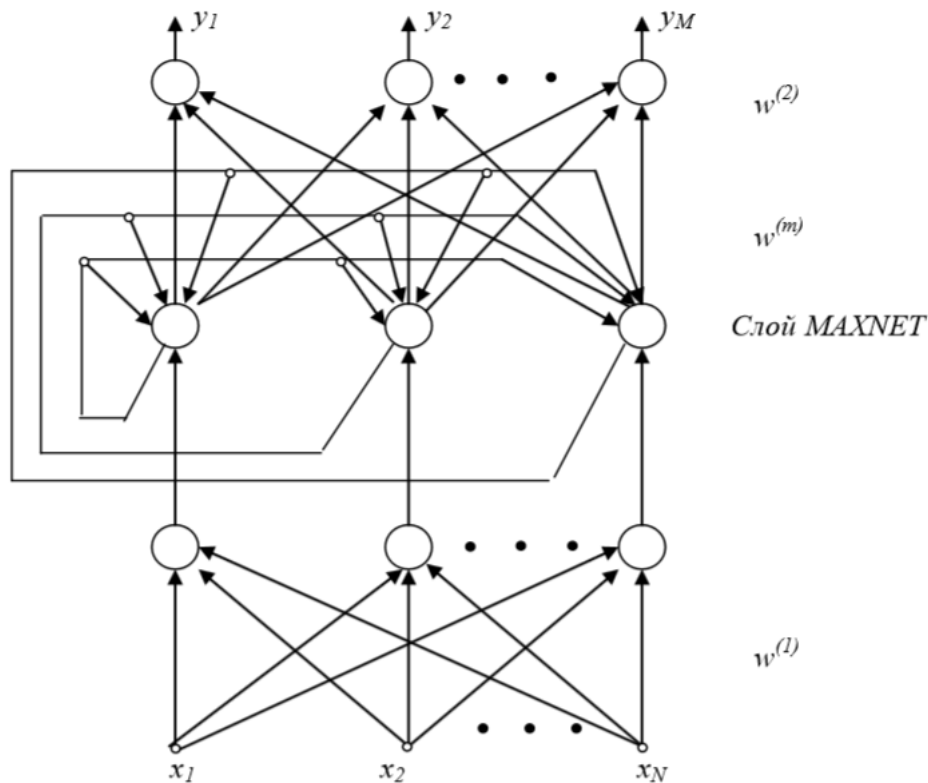


Рис. 4. Обобщенная структура сети Хемминга

Веса первого слоя соответствуют входным векторам-образцам  $x^{(t)}$ , поэтому  $w_{ij}^{(1)} = x_j^{(t)}$  для  $p, t = 1, 2, \dots, p, i = t, j = 1, 2, \dots, N$ , то есть веса первого нейрона запоминают компоненты первого входного вектора. Веса второго нейрона – компоненты второго вектора и т. д.

Аналогично веса выходного слоя соответствуют очередным векторам образов  $y^{(t)}$ ,  $w_{li}^{(2)} = y_l^{(t)}$ ,  $i, t, l = 1, 2, \dots, p$ .

В случае нейронов слоя MAXNET, функционирующих в режиме WTA, веса сети должны усиливать собственный сигнал нейрона и ослаблять остальные сигналы. Для достижения этого принимается  $w_{ij}^{(m)} = 1$ , а также

$$-\frac{1}{p-1} < w_{is}^{(m)} < 0 \quad (16)$$

для  $i \neq s$ . Для обеспечения абсолютной сходимости алгоритма веса  $w_{ij}^{(m)}$  должны отличаться друг от друга. Р. Липпман в своей работе принял

$$w_{is}^{(m)} = -\frac{1}{p-1} + \xi, \quad (17)$$

где  $\xi$  - случайная величина с достаточно малой амплитудой. В процессе функционирования сети в режиме распознавания можно выделить три фазы. В первой из них на вход подается  $N$ -элементный вектор  $x$ . После предъявления этого вектора на выходах нейронов первого слоя генерируются сигналы, задающие начальные состояния нейронов второго слоя. Нейроны первого слоя рассчитывают расстояния Хемминга между поданными на вход сети вектором  $x$  и векторами весов  $w^{(t)} = x^{(t)}$  отдельных нейронов этого слоя. Значения выходных сигналов этих нейронов определяются по формуле:

$$\hat{y}_i = 1 - \frac{d_H(x^{(t)}, x)}{N}, \quad (18)$$

где  $d_H(x^{(t)}, x)$ , обозначает расстояние Хемминга между входными векторами  $x^{(t)}$  и  $x$ , то есть число битов, на которое различаются эти два вектора. Значение  $\hat{y}_i = 1$ , если  $x = x^{(t)}$ , и  $\hat{y}_i = 0$ , если  $x = -x^{(t)}$ . В остальных случаях значения  $\hat{y}_i$  лежат в интервале  $[0, 1]$ .

Сигналы  $\hat{y}_i$  нейронов первого слоя становятся начальными состояниями нейронов слоя MAXNET на второй фазе функционирования сети.

Во второй фазе инициировавшие MAXNET сигналы удаляются, и из сформированного ими начального состояния запускается итерационный процесс. Итерационный процесс завершается в момент, когда все нейроны, кроме нейрона-победителя с выходным сигналом не равным 0, перейдут в нулевое состояние. Задача нейронов этого слоя состоит в определении победителя, то есть нейрона, у которого выходной сигнал отличен от 0. Процесс определения победителя выполняется согласно формуле:

$$y_i(t) = f\left(\sum_s w_{is}^{(m)} y_s(t-1)\right) = f\left(y_i(t-1) + \sum_{s \neq i} w_{is}^{(m)} y_s(t-1)\right), \quad (19)$$

при начальном значении  $y_s = \hat{y}_i$ . Функция активации  $f(y)$  нейронов слоя MAXNET задается выражением:

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{для } y \geq 0 \\ 0 & \text{для } y < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Итерационный процесс (19) завершается в момент, когда состояние нейронов стабилизируется, и активность продолжает проявлять только один нейрон, тогда как остальные пребывают в нулевом состоянии. Активный нейрон становится победителем и через веса  $w_{is}^{(2)}$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) линейных

нейронов выходного слоя представляет вектор  $y^{(t)}$ , который соответствует номеру вектора  $x^{(t)}$ , признанному слоем MAXNET в качестве ближайшего к входному вектору  $x$ .

В третьей фазе этот нейрон посредством весов, связывающих его с нейронами выходного слоя, формирует на выходе сигнал, равный 1, его номер является номер входного образца, к которому принадлежит входной вектор.

Входные узлы сети принимают значения, задаваемые аналогичными компонентами вектора  $x$ . Нейроны первого слоя рассчитывают расстояние Хемминга между входным вектором  $x$  и каждым из  $p$  закодированных векторов-образцов  $x^{(t)}$ , образующих веса нейронов первого слоя. Нейроны в слое MAXNET выбирают вектор с наименьшим расстоянием Хемминга, определяя, таким образом, класс, к которому принадлежит предъявленный входной вектор  $x$ . Веса нейронов выходного слоя формируют вектор, соответствующий классу входного вектора. При  $p$  нейронах первого слоя, емкость запоминающего устройства Хемминга также равна  $p$ , так как каждый нейрон представляет единственный класс. Важным достоинством сети Хемминга считается небольшое, по сравнению с сетью Хопфилда, число взвешенных связей между нейронами. Так, например, 100-входная сеть Хопфилда, кодирующая 10 различных векторных классов, должна содержать 10000 взвешенных связей, тогда как аналогичная сеть Хемминга содержит 1100 связей, из которых 1000 весов находятся в первом слое, а 100 – в слое MAXNET.

### **Рекуррентная сеть Эльмана**

Данная рекуррентная сеть представляет собой развитие сетей персептронного типа за счет добавления в них обратных связей. Сеть Эльмана является одним из представителей типа сетей, названных рекуррентными многослойными персептронами (RMLP). Сеть Эльмана характеризуется частичной рекуррентностью в форме обратной связи между входным и скрытым слоем, реализуемой с помощью единичных элементов запаздывания  $z^{-1}$ . Обобщенная структура этой сети представлена на рис.1.

Каждый скрытый нейрон имеет свой аналог в контекстном слое, образующем совместно с внешними входами сети входной слой. Выходной слой состоит из нейронов, однонаправлено связанных только с нейронами скрытого слоя. Обозначим внутренний вектор возбуждения сети  $x$  (в его состав входит пороговый элемент), состояния скрытых нейронов  $v \in R^K$ , а выходные сигналы сети –  $y \in R^M$ . Тогда входной вектор сети в момент времени  $t$  имеет форму:

$$x(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_N(t), v_1(t-1), v_2(t-1), \dots, v_K(t-1)] \quad (21)$$

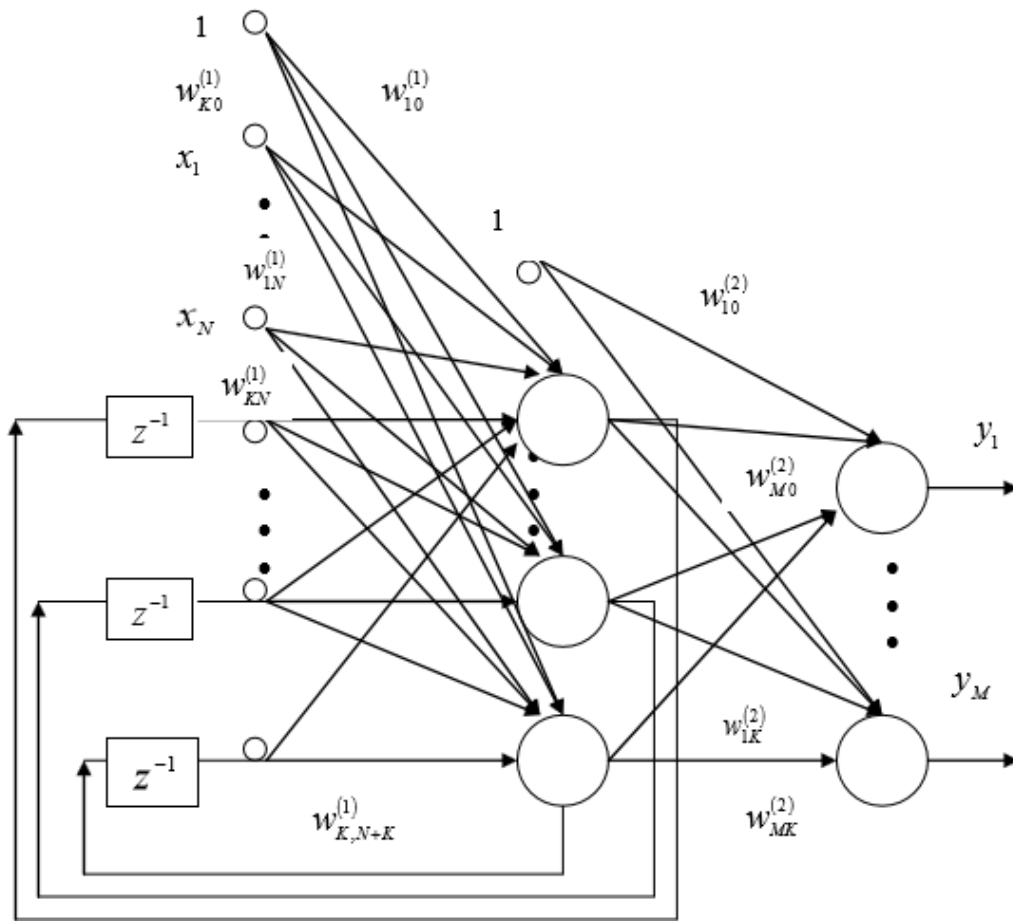


Рис. 1 Обобщенная структура сети Эльмана

Веса синаптических связей первого (скрытого) слоя сети обозначим  $w_{ij}^{(1)}$ , а второго (выходного) слоя  $w_{si}^{(2)}$ . Если взвешенную сумму  $i$ -го нейрона скрытого слоя обозначить  $u_i$ , а его выходной сигнал –  $v_i$ , то

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^{N+K} w_{ij}^{(1)} x_j(t) \quad (22)$$

$$v_i(t) = f_1(u_i(t)) \quad (23)$$

Веса  $w_{ij}^{(1)}$  образуют матрицу  $W^{(1)}$  синаптических связей скрытого слоя, а  $f_1(u_i)$  – функция активации  $i$ -го нейрона скрытого слоя. Аналогично можно обозначить взвешенную сумму  $s$ -го нейрона выходного слоя  $g_s$ , а соответствующий ему выходной сигнал сети –  $y_s$ . Эти сигналы описываются формулами:

$$g_s(t) = \sum_{i=0}^K w_{si}^{(2)} v_i(t) : \quad (24)$$

$$y_s(t) = f_2(g_s(t)) \quad (25)$$

В свою очередь, веса  $w_{si}^{(2)}$  образуют матрицу  $W^{(2)}$ , описывающую синаптические связи нейронов выходного слоя, а  $f_2(u_s)$  – функция активации  $s$ -го нейрона выходного слоя.

### *Алгоритм обучения рекуррентной сети Эльмана*

Для обучения сети Эльмана будем использовать градиентный метод наискорейшего спуска. Для этого метода необходимо задать формулы, позволяющие рассчитывать градиент целевой функции в текущий момент времени. Целевая функция в момент времени  $t$  определяется как сумма квадратов разностей между значениями выходных сигналов сети и их ожидаемыми значениями для всех  $M$  выходных нейронов

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^M [y_s(t) - d_s(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^M e_s(t)^2 \quad (26)$$

При дифференцировании целевой функции относительно весов выходного слоя получаем:

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha\beta}^{(2)} E(t) &= \frac{\partial E(t)}{\partial w_{\alpha\beta}^{(2)}} = \sum_{s=1}^M e_s(t) \frac{df_2(g_s(t))}{dg_s(t)} \frac{dg_s(t)}{dw_{\alpha\beta}^{(2)}} = \sum_{s=1}^M e_s(t) \frac{df_2(g_s(t))}{dg_s(t)} \sum_{i=0}^K \frac{d(w_{si}^{(2)} v_i(t))}{dw_{\alpha\beta}^{(2)}} = \\ &= \sum_{s=1}^M e_s(t) \frac{df_2(g_s(t))}{dg_s(t)} \sum_{i=0}^K \left( \frac{dv_i}{dw_{\alpha\beta}^{(2)}} w_{si}^{(2)} + \frac{dw_{si}^{(2)}}{dw_{\alpha\beta}^{(2)}} v_i(t) \right) \end{aligned} \quad (27)$$

Связи между скрытым и выходным слоем однонаправленные, поэтому:

$$\frac{dv_i}{dw_{\alpha\beta}^{(2)}} = 0 \quad (28)$$

С учетом этого факта получим:

$$\nabla_{\alpha\beta}^{(2)} E(t) = \sum_{s=1}^M e_s(t) \frac{df_2(g_s(t))}{dg_s(t)} \sum_{i=0}^K \frac{dw_{si}^{(2)}}{dw_{\alpha\beta}^{(2)}} v_i(t) = e_\alpha(t) \frac{df_2(g_\alpha(t))}{dg_\alpha(t)} v_\beta(t) \quad (29)$$

При использовании метода наискорейшего спуска веса  $w_{\alpha\beta}^{(2)}$  уточняются по формуле:

$$w_{\alpha\beta}^{(2)}(t+1) = w_{\alpha\beta}^{(2)}(t) + \Delta w_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad (30)$$

$$\text{где } \Delta w_{\alpha\beta}^{(2)} = -\eta \nabla_{\alpha\beta}^{(2)} E(t) \quad (31)$$

Формулы уточнения весов скрытого слоя сети Эльмана более сложные по сравнению с персептронной сетью из-за наличия обратных связей между скрытым и контекстным слоями. Расчет компонентов вектора градиента целевой функции относительно весов скрытого слоя реализуется по формулам:

$$\nabla_{\alpha\beta}^{(1)} E(t) = \sum_{s=1}^M e_s(t) \frac{df_2(g_s(t))}{dg_s(t)} \sum_{i=1}^K \frac{d(v_i w_{si}^{(2)})}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \sum_{s=1}^M e_s(t) \frac{df_2(g_s(t))}{dg_s(t)} \sum_{i=1}^K \frac{dv_i(t)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} w_{si}^{(2)} \quad (32)$$

$$\frac{dv_i(t)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \frac{df_1(u_i)}{du_i} \sum_{k=0}^{N+K} \frac{d(x_k(t) w_{ik}^{(1)})}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \frac{df_1(u_i)}{du_i} \left[ \delta_{i\alpha} x_\beta + \sum_{k=N+1}^{N+K} \frac{dx_k(t)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} w_{ik}^{(1)} \right] \quad (33)$$

где  $\delta_{i\alpha}$  – дельта Кронекера, то есть:

$$\delta_{i\alpha} = \begin{cases} 1, & i = \alpha \\ 0, & i \neq \alpha \end{cases}$$

Из определения входного вектора  $x$  (формула (6.21)) в момент времени  $t$  следует выражение (14):

$$\frac{dv_i(t)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \frac{df_1(u_i)}{du_i} \left[ \delta_{i\alpha} x_\beta + \sum_{k=N+1}^{N+K} \frac{dv_k(t-1)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} w_{ik}^{(1)} \right] = \frac{df_1(u_i)}{du_i} \left[ \delta_{i\alpha} x_\beta + \sum_{k=1}^K \frac{dv_k(t-1)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} w_{i,k+N}^{(1)} \right] \quad (34)$$

Это выражение позволяет рассчитать производные целевой функции относительно весов скрытого слоя в момент времени  $t$ . Следует отметить, что это рекуррентная формула, определяющая производную в момент времени  $t$  в зависимости от ее значения в предыдущий момент  $t - 1$ . Начальные значения производных в момент  $t = 0$  считаются нулевыми:

$$\frac{dv_1(0)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \frac{dv_2(0)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = \dots = \frac{dv_K(0)}{dw_{\alpha\beta}^{(1)}} = 0. \quad (35)$$

Таким образом, алгоритм обучения сети Эльмана можно представить в следующем виде:

1. Присвоить весам случайные начальные значения, имеющие, как правило, равномерное распределение в определенном интервале (например, между -1 и 1).

2. Для очередного момента  $t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) определить состояние всех нейронов сети (сигналы  $v_i$  и  $y_i$ ). На этой основе можно сформировать входной вектор  $x(t)$  для произвольного момента  $t$ .

3. Определить вектор погрешности обучения  $e(t)$  для нейронов выходного слоя как разность между фактическим и ожидаемым значениями

сигналов выходных нейронов.

4. Сформировать вектор градиента целевой функции относительно весов выходного и скрытого слоя с использованием формул (29), (32) и (34).

5. Уточнить значения весов сети согласно правилам метода наискорейшего спуска:

- для нейронов выходного слоя сети по формуле

$$w_{\alpha\beta}^{(2)}(t) = w_{\alpha\beta}^{(2)}(t-1) - \eta \nabla_{\alpha\beta}^{(2)} E(t) \quad (36)$$

- для нейронов скрытого слоя сети по формуле

$$w_{\alpha\beta}^{(1)}(t) = w_{\alpha\beta}^{(1)}(t-1) - \eta \nabla_{\alpha\beta}^{(1)} E(t) \quad (37)$$

После уточнения значений весов перейти к пункту 2 алгоритма для расчета в очередной момент времени  $t$ . Практические реализации алгоритма обучения сети Эльмана строятся на методе наискорейшего спуска, усиленном моментом. Это значительно повышает эффективность обучения и вероятность достижения глобального минимума целевой функции. При использовании такого подхода уточнение вектора весов в момент времени  $t$  выполняется в соответствии с формулой:

$$\Delta w(t) = -\eta \nabla E(t) + \alpha(t) \Delta w(t-1), \quad (38)$$

где  $\alpha(t)$  – коэффициент момента, выбираемый из интервала (0, 1). Первое слагаемое этого выражения соответствует обычному методу обучения, второе – учитывает фактор момента, отражающий последнее изменение весов и не зависящий от фактического значения градиента. Чем больше величина  $\alpha$ , тем большее влияние на подбор весов оказывает слагаемое момента. Его значение существенно возрастает на плоских участках целевой функции и около локального минимума, где значение градиента близко к нулю. В окрестностях локального минимума фактор момента может вызвать изменение весов, ведущее к росту целевой функции и к выходу из зоны локального минимума с возобновлением поиска глобального минимума.